Cognome - Nome - matricola: ....

SECONDO Compitino di Fisica Matematica due
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 12 giugno 2012

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito.
CONSEGNATE UN'UNICA VERSIONE DEL COMPITO: NIENTE BRUTTE COPIE

1] Si scriva l'equazione di Lagrange relativa alla seguente Lagrangiana definita in $\mathbb{R}^2 \equiv T\mathbb{R}$,

$$L(q,\dot q) = e^{-q^2-\dot q^2} + 2\,\dot q\, e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-\lambda^2}\,d\lambda$$

e quindi

(i) si proponga una nuova (semplificata) Lagrangiana $\bar L(q,\dot q)$ equivalente a $L(q,\dot q)$.

(ii) Affermare, o negare, che la nuova Lagrangiana è connessa alla vecchia dalla nota relazione $\bar L(q,\dot q) = c\,L(q,\dot q) + \frac{d}{dt}F$, per qualche $c \neq 0$ e $F(q)$, ricordando che $\frac{d}{dt}F = \frac{\partial F}{\partial q}(q)\dot q$.

(iii) (facoltativo: pensarci solo dopo aver risposto a tutte le altre domande del compitino) Mostrare che il principio variazionale connesso a $\bar L(q,\dot q)$,

$$J : \Gamma^{q=0,\,q=0}_{t=0,\,t=\pi} \longrightarrow \int_{t=0}^{t=\pi} \bar L(q(t),\dot q(t))dt$$

ammette infinite soluzioni; indicarle.

2] Sia $R \in SO(n)$. La mappa:

$$\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \bar q \\ \bar p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rq \\ Rp \end{pmatrix}$$

1) può essere interpretata come un cambio di coordinate in $\mathbb{R}^{2n} \equiv T^*\mathbb{R}^n$, ereditato da un cambio nella varietà base $\mathbb{R}^n$? se si, perché? se no, perché?

2) può essere interpretata come una trasformazione canonica in $\mathbb{R}^{2n} \equiv T^*\mathbb{R}^n$? se si, perché? se no, perché?

3] Determinare la funzione generatrice di tipo F_2 generante una Tr. Canonica indipendente dal tempo, di valenza $c = 1$, che muta l'Hamiltoniana

$$H(q,p) = \omega\, p + e^{-q}$$

nell'Hamiltoniana

$$K(\tilde q,\tilde p) = \omega\,\tilde p$$

Soluzione.

1]

(i)

$$L(q,\dot q) = e^{-q^2-\dot q^2} + 2\,\dot q\, e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-\lambda^2}\,d\lambda$$

$$\frac{d}{dt}(-2\dot q\, e^{-q^2-\dot q^2}+2\, e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-\lambda^2}\,d\lambda+2\,\dot q\, e^{-q^2-\dot q^2})-2\,q\, e^{-q^2-\dot q^2}+4\,q\,\dot q\, e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = 0$$

$$-4\,q\,\dot q\int_0^{\dot q} e^{-\lambda^2}\,d\lambda + 2\,\ddot q\, e^{-q^2-\dot q^2} - 2\,q\, e^{-q^2-\dot q^2} + 4\,q\,\dot q\, e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = 0$$

$$\ddot q + q = 0$$

(ii)

$$\bar L(q,\dot q) = \frac{1}{2}|\dot q|^2 - \frac{1}{2}|q|^2 \simeq L(q,\dot q)$$

$\bar L(q,\dot q)$ *non* è chiaramente del tipo $c\,L(q,\dot q)+\frac{d}{dt}F$: il termine $\frac{d}{dt}F$ è *lineare* nelle $\dot q$.

(iii) (fac.) L'integrale generale di $\ddot q + q = 0$ è dato dalle $\mathbb{R}$-combinazioni lineari di $\sin t$ e $\cos t$. Il principio variazionale è soddisfatto in $\Gamma^{q=0,\,q=0}_{t=0,\,t=\pi}$ da ogni funzione $q(t) = k\sin t,\ \forall k\in\mathbb{R}$.

2] Per ogni tr. lineare $\bar q = Aq$, $\det A \neq 0$, la tr. ereditata in $T^*\mathbb{R}^n$ è $\bar p = A^{-T}p$. Quindi quella mappa è una trasf. ereditata da $\bar q = Rq$ dato che $R^{-T} = R$. Infine, tutte le trasf. ereditate da tr. sulla varietà base sono canoniche: una f. generatrice è $F_2(q,\bar p) = \bar p\cdot Rq$.

3] L'equazione da studiare è (per $c = 1$):

$$\omega\frac{\partial S}{\partial q}(q,\tilde p) + e^{-q} = \omega\tilde p$$

da cui

$$S(q,\tilde p) = q\tilde p + \frac{e^{-q}}{\omega}$$